Μαθημα 8º 28/3/2017

Απει 4

Απο χθες...

Προταση 4.1.7

$A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστο ορθ. $f: A \to \mathbb{R}$ ολοκληρωσιμη με $f \geq 0$ και $f(\bar{x}_0) > 0$ σε σημειο συνεχειας $\bar{x}_0 \in A \Rightarrow \int_A f > 0$

Σημερα

Πορισμα 4.1.4

$A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστο ορθογωνιο, $f: A \to \mathbb{R}$ ολοκληρωσιμη, $f \geq 0$
$\Rightarrow \int_A f \geq 0$

Πορισμα 4.1.8

$A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστο ορθογ., $f: A \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ ολοκληρωσιμη
τοτε $f = 0$ σχεδον παντου $\Leftrightarrow \int_A f = 0$

Πορισμα 4.1.5

$A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστο ορθογωνιο, $f, g: A \to \mathbb{R}$ ολοκληρωσιμη. Τοτε
$f = g$ σχεδον παντου $\Leftrightarrow \int_A |f - g| = 0$

Πορισμα 4.1.6

(ιδιες προϋποθεσεις) $\overset{①}{\Rightarrow} \int_A f = \int_A g$

$\underset{②}{\not\Leftarrow}$

①

Πορισμα 4.1.7 (SOS)

$A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστο ορθογωνιο, $f, g : A \to \mathbb{R}$ ολοκληρωσιμη

$f = g$ στο $\mathring{A} \overset{③}{\Rightarrow} \int_A f = \int_A g$

Πορισμα 4.1.8

$A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστο ορθογωνιο, $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμενη με

$\{\bar{x} \in A : f(x) \neq 0\} \subset \partial A \Rightarrow f$ ολοκλ και $\int_A f = 0$

Αποδειξη Πορ 4.1.6

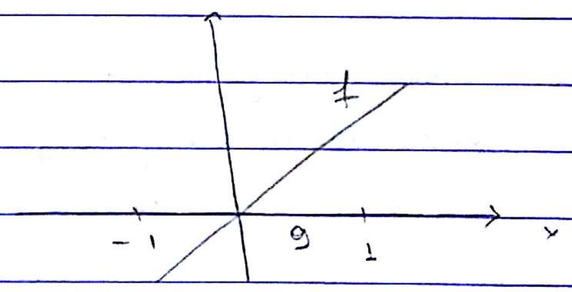
① $\int_A (f-g) = \int_A f - \int_A g \leq 0 = \int_A |f-g|$

$-\int_A (f-g) = \int_A g - \int_A f \leq 0$

② Αντιπαραδειγμα

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $A = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = 0$

$\Rightarrow \int_A f = \int_g f = 0$

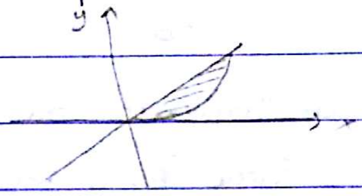


②

Αποδειξη Προτ 4.1.7

③ ∂A έχει μηδενικο περιεχομενο

④ Πως μπορουμε να ορισουμε πολλαπλο ολοκληρωμα σε ενα «οποιοδηποτε» $B \subset \mathbb{R}^n$ (π.χ μπαλα στο $\mathbb{R}^3$ ή διαφορα τετοια υποσυνολα)

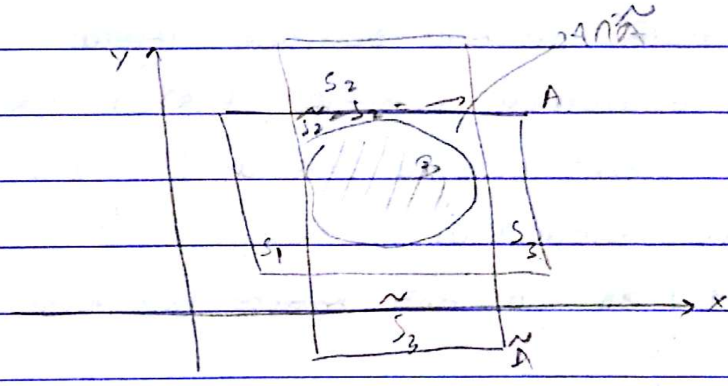


Ορισμος: Εστω $B \subset \mathbb{R}^n$ μη κενο και φραγμενο. Η $f: B \to \mathbb{R}$ λεγεται ολοκληρωσιμη αν η $f_B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$f_B(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \bar{x} \in B \\ 0, & \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus B \end{cases}$$

ειναι ολοκληρωσιμη σε ενα κλειστο ορθογωνιο $A \subset \mathbb{R}^n$ με $B \subset A$, δηλ. αν υπαρχει το:

$$\int_A f_B = \int_A (f_B|_A) =: \int_B f \quad : \text{Συμβ.}$$



Παρατηρησεις

1) Η $f: B \to \mathbb{R}$ θα πρεπει να ειναι φραγμενη

2) $\int_{\emptyset} f := 0$

3) Το $\int_B f$, οπως οριστηκε ειναι «καλα ορισμενο» δηλ.

ανεξαρτητο απο το κλ. ορθ $A \subset \mathbb{R}^n$ με $A \supset B$.

[Εστω $\tilde{A} \supset B$ κλειστο ορθογ. Τοτε επιλεγουμε δυο διαμερισεις P και $\tilde{P}$ του A και $\tilde{A}$ αντιστοιχα ετσι ωστε $A \cap \tilde{A}$ να ειναι υποορθογωνιο και για τα δυο

Τοτε $$\int_A f_B \underset{\text{προταση}}{=} \int_{A\cap\tilde{A}} f_B + \underbrace{\sum_{S \in \mathcal{S}_P \setminus \{A\cap\tilde{A}\}} \int_S f_B}_{=0}$$

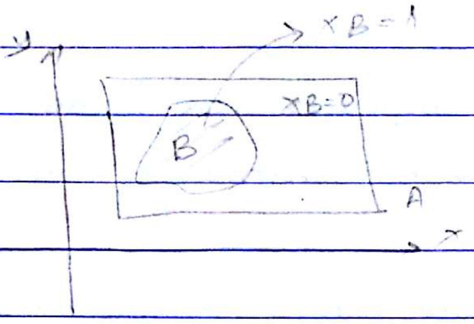
$$= \int_{A\cap\tilde{A}} f_B + \sum_{\tilde{S} \in \mathcal{S}_{\tilde{P}} \setminus \{A\cap\tilde{A}\}} \int_{\tilde{S}} f_B \underset{\text{προταση}}{=} \int_{\tilde{A}} f_B \;]$$

Ορισμος

Ενα $B \subset \mathbb{R}^n$ μη κενο, φραγμενο λεγεται Jordan-μετρησιμο αν η συναρτηση $f: B \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = 1$ $\forall \bar{x} \in B$ $(f \equiv 1)$ ειναι ολοκληρωσιμη, δηλ αν $\exists \int_B 1 =: V(B) \in \mathbb{R}$ το οποιο ονομαζεται περιεχομενο $\stackrel{\text{η}}{}$ ογκος του B

$(\Leftrightarrow \exists \int_A \chi_B$ για $A \supset B$ κλειστο ορθογωνιο οπου

$$\chi_B(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & , \bar{x} \in B \\ 0 & , \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus B \end{cases}$$



($\iff$ ∂B έχει μηδενικό περιεχόμενο $\underset{\text{συμπαγές}}{\overset{\partial B}{\iff}}$ ∂B μηδ. μέτρο)

Παρατηρήσεις

α) Θα εξετάζουμε ολοκληρώματα (φραγμένων) συναρτήσεων $f: B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ μόνο για $B \subset \mathbb{R}^n$ που είναι φραγμένα ① και έχει ∂B με μηδενικό περιεχόμενο ② ($\overset{\text{εδώ}}{=}$ μηδενικό μέτρο). Τα σύνολα αυτά θα τα λέμε Jordan-μετρήσιμα.

① για να «χωράνε» σε κλειστά ορθογώνια

② για να μπορώ σίγουρα να υπολογίζω το $\int_B 1 \; (=: v(B))$

β) Το $v(B) = \int_B 1$ δίνει το περιεχόμενο του $B \subset \mathbb{R}^n$ και ταυτόχρονα (βλέπε δεf. πετρελαίου) τον όγκο του $B \times [0,1]$, $v(B \times [0,1])$

⊛ Ισχύουν τα εξής:

1) Κριτήριο Lebesgue

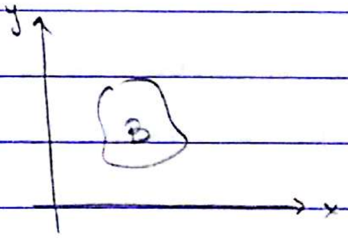
Έστω $B \subset \mathbb{R}^n$ $\underbrace{\text{μη κενό και Jordan-μετρήσιμο}}_{\iff \text{ φραγμένη με } \partial B \text{ μηδ. περ.}}$ και $f: B \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε f ολοκληρώσιμη $\iff$ f συνεχής σχεδόν παντού

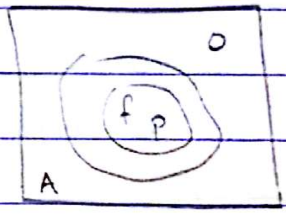
2) Εστω $B \neq \emptyset$, $\subset \mathbb{R}^n$ συμπαγες και Jordan-μετρησιμο και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχης $\Rightarrow$ f ολοκληρωσιμη, δηλ. $\exists \int_B f$

⊛ Το ολοκληρωμα αυτο υπαρχει
Εστω η χ_B (που εχει ασυνεχειες στο ∂B και μονο) ειναι συνεχης σχεδον παντου. (··)

$$V(B) = \int_B 1 = \int_B 1 \, d\bar{x} = \int_A \chi_B(\bar{x}) \, d\bar{x}$$

με $\chi_B(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in B \\ 0, & \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus B \end{cases}$, $\chi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$





(··) (Lebesgue) δηλ. εαν ∂B εχει μηδενικο μετρο

Ιδιοτητες

του $\int_B f$, οπου $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-μετρησιμες ($\Leftrightarrow$ φραγμενη με ∂B μηδ. μετρου) και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχης σχεδον παντου

1) f, g ολοκλ. $\Rightarrow$ $f+g$ ολοκλ. με $\int_B (f+g) = \int_B f + \int_B g$

2) af ολοκλ $\Rightarrow$ af ολοκλ. με $\int_B (af) = a \int_B f$

3) $f \leq g \Rightarrow \int_B f \leq \int_B g$ με f, g ολοκλ.

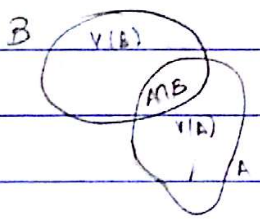
4) f ολοκλ. $\Rightarrow$ $|f|$ ειναι ολοκλ. με $\left| \int_B f \right| \leq \int |f|$

5) f, g ολοκλ. $\Rightarrow \exists \int_B fg$ δηλ. fg ολοκλ.

Ιδιοτητες Jordan-μετρησιμων συνολων

A, B J-μετρ. $\Rightarrow$ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ ειναι J-μετρ.

Επισης $V(A \cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B)$



Ιδιοτητες

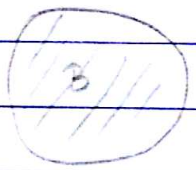
ολοκλ. $\int_B f$: f ολοκλ επι του J-μ, A και $B \subset \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ f ολοκλ επι των $A \cup B$, $A \cap B$ και $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \underbrace{\int_{A\cap B} f}_{=0,\ \text{αν } A\cap B=\emptyset}$

Παρατηρηση

Εστω $B \subset \mathbb{R}^n$ μη ζερο J-μ και $\int_B 1 = V(B) = 0$ τοτε

λεμε οτι το $B \subset \mathbb{R}^n$ εχει μηδενικο περιεχομενο
(το οποιο ισοδυναμει με τον ορισμο του αρχικο μας του μηδ. περιεχ.)



$V(B)=0$

μη μηδ περιεχ. στο $\mathbb{R}^2$

Προταση

$A, B \subset \mathbb{R}^n \neq \emptyset$, J-μ με $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ και εστω $f: A\cup B \to \mathbb{R}$

Τοτε f ολοκλ $\Leftrightarrow$ $f|_A$, $f|_B$ ολοκλ και εχουμε

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Ειδικοτερα για $f \equiv 1$: $V(A\cup B) = V(A) + V(B)$